I

È assegnato l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito dalle assegnazioni:

$$\begin{cases} f(1,0,0) = (h,1,1) \\ f(1,1,0) = (h+2, h+2, h+1) \\ f(0,-1,2) = (-4,-3-h,-h) \end{cases} \text{ con } h \text{ parametro reale}$$

1) Studiare l'endomorfismo f al variare di h determinando in ciascun caso $\operatorname{Im} f$ e $\operatorname{Ker} f$.
2) Discutere al variare di h la semplicità di f.
3) Dati i sottospazi $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ y+z=0\}$ e $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x+y-z=0\}$ determinare $f(U)$, $f(V)$ e $f(U)+f(V)$, al variare di $h \in \mathbb{R}$.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.
1) Date le rette

$$\mathbf{r} : \begin{cases} y-1=0 \\ x-z+1=0 \end{cases} \quad ; \quad \mathbf{s} : \begin{cases} x+1=0 \\ y-z-1=0 \end{cases}$$

dopo avere verificato che esse sono complanari, determinare il piano che le contiene e calcolare l'angolo individuato dalle due rette.
2) Sul piano coordinato $z=0$ determinare e studiare il fascio ϕ delle coniche tangenti a $\mathbf{t} : x+y=0$ nel punto $A=(2,-2)$ ed a $\mathbf{u} : x-y=0$ nel punto $B=(2,2)$.
3) Determinare e studiare la totalità delle quadriche contenenti la conica di equazioni

$$\begin{cases} x^2 - z^2 - x + z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

e passante per i punti $C=(0,1,0)$, $D=(1,1,1)$, $E=(1,1,0)$.

SVOLGIMENTO, I

1) Usando in $\mathbb{R}^3$ la base canonica avremo

$$M(f) = \begin{pmatrix} h & 2 & -1 \\ 1 & h+1 & -1 \\ 1 & h & 0 \end{pmatrix} \quad \text{con } |M(f)| = h^2 - 1.$$

Quindi per $h \neq \pm 1$ f è isomorfismo. Consideriamo i casi particolari
$h=-1$ $\operatorname{Im} f = \mathscr{L}((-1,1,1),(2,0,-1)) \subsetneq \mathbb{R}^3$, $\operatorname{Ker} f = \{(x,x,x)\}$;
$h=1$ $\operatorname{Im} f = \mathscr{L}((0,0,1),(1,1,0)) \subsetneq \mathbb{R}^3$, $\operatorname{Ker} f = \{(x,-x,-x)\}$.
2) Dal polinomio caratteristico di f

$$P(T) = \begin{vmatrix} h-T & 2 & -1 \\ 1 & h+1-T & -1 \\ 1 & h & -T \end{vmatrix} = (T-1)(-T+h-1)(-T+h+1) = 0$$

si hanno gli autovalori $T = 1,\ h-1,\ h+1$. Se $h \neq 0, 2$ questi autovalori sono distinti e l'endomorfismo è semplice.

Se $h = 0$ avremo $T = 1$ doppio ma l'autospazio V_1 ha dimensione 1 quindi l'endomorfismo non è semplice.
Se $h = 2$ avremo $T = 1$ doppio ma stavolta l'autospazio V_1 ha dimensione 2 quindi l'endomorfismo è semplice.
3) Per determinare $f(U)$ e $f(V)$ le basi di U e di V:

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ z = -y\} = \{(x, y, -y) \in \mathbb{R}^3\} = \mathcal{L}((1, 0, 0), (0, 1, -1))$$

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ z = x + y\} = \{(x, y, x + y) \in \mathbb{R}^3\} = \mathcal{L}((1, 0, 1), (0, 1, 1))$$

da cui segue

$$f(U) = \mathcal{L}\{f(1, 0, 0), f(0, 1, -1)\} = \mathcal{L}((h, 1, 1), (3, h + 2, h))$$

$$f(V) = \mathcal{L}\{f(1, 0, 1), f(0, 1, 1)\} = \mathcal{L}((h - 1, 0, 1), (1, h, h))$$

Mettendo i generatori di $f(U)$ in matrice si ottiene rango due per ogni valore di h quindi $\dim f(U) = 2$. In modo analogo si verifica che la dimensione di $f(V)$ è 2 per ogni valore di h. Infine $f(U) + f(V) = \mathcal{L}((h, 1, 1), (3, h + 2, h), (h - 1, 0, 1), (1, h, h))$; mettendo i generatori in matrice si vede facilmente che il rango è tre per $h \neq \pm 1$, è due per $h = \pm 1$. In questi casi $f(U) = f(V)$.

II

1) Per verificare che le due rette sono complanari basta verificare che hanno un punto comune; si trova facilmente $\mathbf{r} \cap \mathbf{s} = P \equiv (-1, 1, 0)$. Per trovare il piano π che contiene le due rette, dobbiamo cercare tra i piani che contengono $\mathbf{r}$ l'unico che contiene un punto di $\mathbf{s}$, distinto da P, ad esempio il punto $S \equiv (-1, 2, 1) \in \mathbf{s}$. Dal fascio di piani contenente $\mathbf{r}$:

$$\lambda(y - 1) + \mu(x - z + 1) = 0 \quad S \Rightarrow\ \lambda = \mu\ \Rightarrow\ \pi : x + y - z = 0$$

Calcoliamo adesso l'angolo $\alpha = \hat{\mathbf{rs}}$ individuato dalle due rette. La retta $\mathbf{r}$ ha parametri direttori $(1, 0, 1)$, quelli di $\mathbf{s}$ sono $(0, 1, 1)$; quindi si ha:

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

Questo vuol dire che $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$ formano un angolo di $\frac{\pi}{3}$.

2) Ci poniamo sul piano $z = 0$. Siamo nel caso delle coniche bitangenti: le coniche spezzate sono $t \cup u$ e la retta AB, contata due volte. Dunque, il fascio ha equazione:

$$\phi:\ x^2 - y^2 + h(x-2)^2 = 0, \quad \phi:\ (h+1)x^2 - y^2 - 4hx + 4h = 0$$

le coniche spezzate si hanno per $h = \infty, 0$; per gli altri valori di h usando $|A| = -1-h$ avremo:

- $|A| > 0$ per $h < -1$: ELLISSI. $h = -2$ circonferenza: $x^2 + y^2 - 8x + 8 = 0$;
- $|A| < 0$ per $h > -1$: IPERBOLI. Non ci sono iperboli equilatere;
- $|A| = 0$ per $h = -1$: PARABOLA di equazione $\mathbf{p}:\ y^2 - 4x + 4 = 0$.

3) Consideriamo la quadrica generica contenente la conica data

$$y(ax + by + cz + d) + x^2 - z^2 - x + z = 0$$

ed imponiamo il passaggio per i tre punti

$$\begin{cases} b + d = 0 \\ a + b + c + d = 0 \\ a + b + d = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -d \\ c = 0 \end{cases}$$

Dunque il fascio di quadriche ottenuto ha equazione

$$x^2 - dy^2 - z^2 - x + dy + z = 0$$

Dalla matrice associata avremo:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -d & 0 & \frac{d}{2} \\ 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{d}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} |B| = \frac{d^2}{4}\ :\quad |B| > 0 \text{ per } h \neq 0 \\ \\ |A| = d \end{array}.$$

Non ci sono paraboloidi, per $d = 0$ si ha $|B| = |A| = 0$ e $\rho(B) = 2$, la quadrica spezzata è in due piani distinti: $(x - z)(x + z - 1) = 0$.
Per gli altri valori del parametro avremo iperboloidi iperbolici in quanto $|B| > 0$.